# **ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

В данной задаче требуется определить, сколько радиаторов каждого из четырёх видов необходимо выпускать, чтобы получать максимальную прибыль.

Для построения математической модели задачи введем переменные. Обозначим через число радиаторов модели *А*, через – модели *В*, через – модели *С*, а будет обозначать число радиаторов модели *D*.

В условиях данной задачи имеется возможность использовать не более 500 человеко-часов рабочего времени. Известно, что на производство одного радиатора модели *А* необходимо 0,5 человеко-часов. Для моделей *В*, *С*, *D* эти значения равны 1,5, 2 и 1,5 соответственно. Составим первое ограничение:

Аналогично составим второе ограничение на использование стальных листов, зная, что максимально возможное использование составляет 2500м2, а расходы составляют 4м2 для модели *А*; для моделей *В*, *С*, *D* они соответственно равны 2, 6 и 8 м2. Получим:

Имеется также условие выполнения контракта предприятием, которое устанавливает минимальный выпуск радиаторов модели *А*, равный 200 единицам:

Кроме того, переменные*Х1*, *Х2*, *Х3*, *Х4* по своему физическому смыслу не могут принимать отрицательных значений, так как они обозначают количество радиаторов. Поэтому необходимо указать ограничение неотрицательности:

В данной задаче требуется определить план производства предприятия, обеспечивающий максимальную прибыль. Цена одного радиатора модели *А* равна 140 ден.ед., модели *В* – 150 ден.ед., модели *С* – 255 ден.ед., *D* – 230 ден.ед. Таким образом выручка составит ден.ед. Однако для подсчета прибыли стоит учесть все затраты предприятия. Из условия известно, что 1 час рабочего времени стоит 20 ден.ед., 1м2 стального листа стоит 5 ден.ед., прочие расходы на выпуск одного радиатора любой модели составляют 60 ден.ед. Таким образом, затраты будем определять по формуле:

ден.ед.

Для подсчета общей прибыли предприятия и составления целевой функции вычтем из выручки величину затрат и получим:

Приведем полную математическую модель рассматриваемой задачи:

В данной задаче все переменные по своему физическому смыслу могут принимать только целые значения, поэтому на них накладывается ограничение целочисленности.

# **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА**

Приведем математическую модель задачи к стандартной форме. Для этого в ограничение «больше или равно» потребуется ввести избыточную переменную, а в ограничения «меньше или равно» – остаточные:

(4.1)

(4.2)

В ограничении отсутствует базисная переменная (т.е. переменная, входящая только в данное ограничение с коэффициентом, равным единице). Поэтому требуется ввести искусственную переменную:

Таким образом, в каждом ограничении имеется базисная переменная, , ). Остальные переменные – небазисные.

Составляется искусственная целевая функция – сумма искусственных переменных (в данном случае имеется только одна искусственная переменная):

Искусственная целевая функция выражается через небазисные переменные. Для этого выразим искусственную переменную через небазисные переменные:

и подставим в исходную целевую функцию.

Для приведения всей задачи к стандартной форме требуется перейти к искусственной целевой функции, подлежащей максимизации. Для этого она умножается на -1:

Приведем полную математическую модель задачи к стандартной форме и с искусственным базисом:

Составим первую симплекс-таблицу (таблица 4.1).

Таблица 4.1– Исходная симплекс-таблица (первый этап)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис |  |  |  |  |  |  |  |  | Решение |
|  | -50 | -50 | -125 | -100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -200 |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 200 |
|  | 0,5 | 1,5 | 2 | 1,5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 500 |
|  | 4 | 2 | 6 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2500 |

Приведенное в таблице 4.1 начальное решение () является недопустимым: оно не соответствует начальной системе ограничений(4.1), так как не выполняется условие .

Для поиска начального допустимого решения реализуется первый этап двухэтапного метода: минимизация искусственной целевой функции на основе процедур симплекс-метода.

Выбирается переменная для включения в базис: это переменная , так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке искусственной целевой функции.

Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения: 200/1=200; 500/0,5=1000; 2500/4=625. Минимальное симплексное отношение соответствует переменной значит эта переменная исключается из базиса.

В результате преобразований по правилам симплекс-метода будет получена следующая симплекс-таблица (таблица 4.2).

Таблица 4.2– Симплекс-таблица после первой итерации

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис |  |  |  |  |  |  |  |  | Решение |
|  | 0 | -50 | -125 | -100 | 0 | 0 | -50 | 0 | 10000 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 200 |
|  | 0 | 1,5 | 2 | 1,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 400 |
|  | 0 | 2 | 6 | 8 | 0 | 1 | 4 | 0 | 1700 |

Как видно из новой таблицы 4.2, искусственная целевая функция равна нулю, и в базисе нет искусственных переменных. Получено допустимое решение: В том, что оно допустимое, легко убедиться, подставив значения переменных в систему ограничений (2.1).

Таким образом, первый этап двухэтапного метода завершен. Искусственная целевая функция и искусственные переменные исключаются из симплекс-таблицы (таблица 4.3).

Таблица 4.3– Исходная симплекс-таблица (для второго этапа)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис |  |  |  |  |  |  |  | Решение |
|  | 0 | -50 | -125 | -100 | 0 | 0 | -50 | 10000 |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 200 |
|  | 0 | 1,5 | 2 | 1,5 | 1 | 0 | 0,5 | 400 |
|  | 0 | 2 | 6 | 8 | 0 | 1 | 4 | 1700 |

Полученное решение является допустимым, но не оптимальным: признак неоптимальности решения – наличие отрицательных коэффициентов в строке целевой функции . Поэтому реализуется второй этап двухэтапного метода – максимизация целевой функции

В базис включается переменная , так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычисляем симплексные отношения: 400/2=200; 1700/6=283,(3). Минимальное из них соответствует переменной ; значит эта переменная исключается из базиса. После преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (таблица 4.4).

Таблица 4.4 – Симплекс-таблица после первой итерации на втором этапе.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис |  |  |  |  |  |  |  | Решение |
|  | 0 | 43,75 | 0 | -6,25 | 62,5 | 0 | -18,75 | 35000 |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 200 |
|  | 0 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,5 | 0 | 0,25 | 200 |
|  | 0 | -2,5 | 0 | 3,5 | -3 | 1 | 2,5 | 500 |

Решение, полученное в таблице 4.4, все еще не является оптимальным, так как в строке целевой функции имеются отрицательные коэффициенты. Поэтому продолжаем вычисления по правилам симплекс-метода. В базис включаем переменную . Составим симплексные отношения: 200/0,25=800; 500/2,5=200. Минимальное симплексное отношение соответствует переменной , значит эта переменная исключается из базиса. По результатам преобразований будет получена новая симплекс-таблица (таблица 4.5).

Таблица 4.5 – **Итоговая симплекс-таблица.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис |  |  |  |  |  |  |  | Решение |
|  | 0 | 25 | 0 | 20 | 40 | 7,5 | 0 | 38750 |
|  | 1 | -1 | 0 | 1,4 | -1,2 | 0,4 | 0 | 400 |
|  | 0 | 1 | 1 | 0,4 | 0,8 | -0,1 | 0 | 150 |
|  | 0 | -1 | 0 | 1,4 | -1,2 | 0,4 | 1 | 200 |

Получено оптимальное решение (признак его оптимальности – отсутствие отрицательных элементов в строке целевой функции). Основные переменные задачи приняли следующие значения: ,,,. Это означает, что необходимо выпускать 400 радиаторов модели *А* и 150 модели С*.* Радиаторы моделей *В* и *D* выпускать не следует. Значения остаточных переменных: , означают, что будут использованы все 500 человеко-часов рабочего времени и все 2500м2 рабочих листов соответственно. Значение целевой функции показывает, что прибыль при таких объемах производства составит 38750 ден.ед.

Избыточная переменная означает, что выпуск радиаторов модели *А* превысит минимально необходимый на 200 (требуется выпустить не менее 200, а оптимальный объем производства – 400).